Instituto de Física - UFF
Mecânica Analítica - 1^{o}P/2012 - Prof. Daniel Jonathan
Lista de Exercícios 2 - teste na quinta, 29/03

1. Uma "transformação de calibre" dos potenciais escalar (ϕ) e vetor ($\mathbf{A}$) do eletromagnetismo é definida por

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad , \quad \phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\Lambda}{\partial t},$$

onde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ é uma função diferenciável arbitrária.

a) O que ocorre com os campos elétrico $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ e magnético $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$ sob essa transformação?

b) De que maneira a Lagrangeana de uma partícula se movendo sobre a ação destes potenciais é afetada por essa transformação? As equações de movimento são ou não alteradas?

2. Mostre que a Lagrangeana

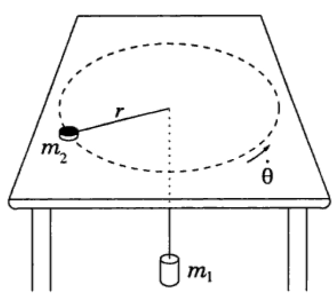
$$\bar{L} = \frac{1}{12}\dot{x}^4 + \frac{\omega^2 x^2}{2}\dot{x}^2 - \frac{\omega^4 x^4}{4}$$

gera uma equação de movimento equivalente à de um oscilador harmônico de massa $m = 1$, isto é, uma equação que possui as mesmas soluções que a equação de movimento do oscilador, porque pode ser escrita na forma $g(x, \dot{x})\left(\ddot{x} + \omega^2 x\right) = 0$. Prove, no entanto, que $\bar{L}$ não difere meramente por uma derivada total da Lagrangeana usual $L = \dot{x}^2/2 - \omega^2 x^2/2$.

3. Para um oscilador harmônico de massa m e freqüência angular ω, seja $x_f(t)$ uma solução da eq. de movimento entre $t_0 = 0$ e t_1, e $x(t) = x_f(t) + \eta(t)$, com $\eta(0) = \eta(t_1) = 0$, uma outra trajetória próxima com mesmo ponto inicial e final. Vamos verificar explicitamente que a ação é extremalizada pela trajetória física $x_f(t)$, como prevê o princípio de Hamilton.

a) Mostre que $S[x] = S[x_f] - \frac{m}{2}\int_0^{t_1}\left(\eta\ddot{\eta} + \omega^2\eta^2\right)dt$.

b) Expandindo η na série de Fourier $\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(n\pi t/t_1)$ (por que isso é possível?), mostre que $S[x] = S[x_f] + \frac{mt_1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2\left(\frac{n^2\pi^2}{t_1^2} - \omega^2\right)$ e conclua que ação é mínima para a trajetória física se $t_1 \le T/2 = \pi/\omega$.



4. O sistema representado na figura é tal que a massa m_2 se move sem atrito sobre a mesa horizontal e a massa m_1 só pode movimentar-se verticalmente. O fio que une as massas é inextensível. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange:

a) Escreva o(s) vínculo(s) e as equações de movimento do sistema,

b) Identifique o significado físico do(s) multiplicador(es) de Lagrange, e mostre que a tensão no fio é dada por

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[g + \frac{p_\theta^2}{m_2^2 r^3}\right],$$

onde p_θ é o valor constante de $m_2 r^2\dot{\theta}$.

c) Cheque seu resultado verificando a aceleração de queda da massa m_1 no caso particular em que $p_\theta = 0$,.

5. Considere novamente o problema do disco vertical rolando sem deslizar sobre um plano (exemplo 1.2.6 do livro).

   a) Escreva a Lagrangeana do sistema (atenção com os momentos de inércia!)

   b) Esse sistema possui vínculos não-holônomos, mas lineares nas velocidades generalizadas (eq. 1.2.10). Use a técnica de multiplicadores de Lagrange para escrever as suas equações de movimento.

   c) Resolva essas equações e descreva em palavras como é o movimento resultante.

   Dicas: 1) Pode não parecer a princípio, mas $\phi(t)$ tem uma expressão muito simples! 2) Tente reduzir o problema ao do "patinete", (exemplo 2.4.2).

6. Uma partícula move-se no potencial gravitacional produzido pelas seguintes distribuições de massa homogêneas: (i) esfera de raio R; (ii) paralelepípedo infinitamente longo com seção transversal quadrada; (iii) haste de comprimento l; (iv) disco de raio R; (v) cilindro infinitamente longo com seção transversal circular; (vi) plano infinito; (vii) plano semi-infinito; (viii) fio enrolado na forma de uma hélice infinita de raio R e passo p. Quais são as componentes de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{L}$ (ou combinações delas) que se conservam em cada caso?

7. Uma partícula de massa m e carga elétrica e move-se num campo eletromagnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$, cujo potencial vetor é $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$. (i) Mostre que as equações de Lagrange para a partícula equivalem a $\dot{\mathbf{v}} = -\omega \times \mathbf{v}$ e determine ω em termos de $\mathbf{B}$. (ii) Exprima a Lagrangeana em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) e mostre que, embora ϕ seja coordenada cíclica, a componente $L_z = m\rho^2\dot{\phi}$ do momento angular *não* é conservada. Explique.

8. Seja q_k uma coordenada cíclica da Lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$. Se L for substituída por $\bar{L} = L + \frac{d}{dt}F(q,t)$, em geral q_k *não* será coordenada cíclica de $\bar{L}$ e o seu momento conjugado *não* mais se conservará. Mas sabemos que L e $\bar{L}$ produzem as mesmas equações de movimento! Resolva esse paradoxo aparente. Escolhendo $F = q^2$, discuta o caso da partícula livre em uma dimensão, com $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$.

9. Uma partícula de massa m e vetor posição r move-se no potencial coulombiano ou gravitacional $V = -\kappa/r$, onde $r = |\mathbf{r}|$. (i) Mostre que o vetor de Laplace-Runge-Lenz

   $$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{l} - m\kappa\frac{\mathbf{r}}{r}$$

   está contido no plano da órbita onde $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ é o vetor momento angular. (ii) Mostre que $\mathbf{A}$ é constante de movimento, (iii) Tomando o produto escalar de $\mathbf{A}$ por $\mathbf{r}$, deduza a equação da órbita, isto é, $\mathbf{r}$ como função do ângulo θ entre $\mathbf{A}$ e $\mathbf{r}$. Sugestão: $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) = \mathbf{l} \cdot \mathbf{l}$. (iv) Mostre que a excentricidade é dada por $e = \mathbf{A}/m\kappa$ e que $\mathbf{A}$ aponta ao longo do eixo maior da órbita elíptica.

10. Uma partícula de massa unitária move-se ao longo de uma linha reta sujeita à força não- conservativa $F = -\gamma\dot{x}^2$, com γ uma constante. (i) Mostre que a equação de movimento da partícula pode ser obtida da lagrangiana $L = e^{2\gamma x}\dot{x}^2/2$. (ii) Mostre que a conservação da integral de Jacobi h associada a esta lagrangiana pode ser expressa na forma $\dot{x}e^{\gamma x} = C_1$, onde C_1 é uma constante. (iii) Prove que a ação é invariante sob a transformação $x' = x + a$, $t' = e^{\beta a}t$ para um certo valor de β (determine-o). Interprete geometricamente o significado desta transformação. (iv) Considerando a versão infinitesimal da transformação do item anterior, use o teorema de Noether para demonstrar que $(\gamma t\dot{x} - 1)\dot{x}e^{2\gamma x} = C_2 =$ constante . (v) Combinando as duas constantes de movimento para eliminar $\dot{x}$, prove que

    $$x(t) = A + \frac{1}{\gamma}\ln(B + \gamma t)$$

    e verifique diretamente que esta é a solução da eq. de movimento da partícula.